Partie I : MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1.

Exprimer en fonction de $a = 2^n$:

$$A = 2^{n+3} \qquad B = 2^{2n-1} \qquad C = 2^{-2n} \qquad D = \frac{4^{n+1}}{2^{1-3n}} \qquad E = 2^{n+3} - 2^{2n} + 5\times 2^{n+1} - 3\times 2^{n+2}$$

$$F = (-2)^{2n+3} \qquad G = \frac{1}{(-2)^{3n-2}}$$

EXERCICE 2.

Simplifier : $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$.

EXERCICE 3.

En utilisant l'expression trigonométrique d'un nombre complexe, simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = \frac{i}{\left(1+i\sqrt{2}\right)^2} \qquad\qquad B = \left(\frac{5i^9+1}{3i}\right)^5.$$

EXERCICE 4.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{(3x+1)^2}{3x-5} > 1$.

EXERCICE 5.

Résoudre les équations logarithmiques suivantes, où $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$:

1. $\log_x 32 = 5$;
2. $4\log_2 x = \log_2\left(x^2-2\right) + \log_2 8$;

EXERCICE 6.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n.e^{-u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n > 0$;
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
3. En déduire qu'elle converge vers 0.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = e^{-S_n}$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

EXERCICE 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$.

1. Etudier la parité de f ;
2. Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{5^x - 5^{-x}}$;
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
4. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f ;
5. Résoudre $f(x) = \dfrac{2}{3}$ et en déduire l'ensemble des solutions de $f(x) = -\dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 8.

Une usine a besoin de deux machines M_1 et M_2. La probabilité que M_1 tombe en panne est 0,005. La probabilité que M_2 tombe en panne est 0,007. La probabilité que M_2 tombe en panne sachant que M_1 est en panne est 0,5.

1. Exprimer dans un langage probabiliste les données de l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que M_1 et M_2 soient en panne simultanément ? En déduire la probabilité qu'une machine au moins fonctionne.
3. Quelle est la probabilité que M_1 soit seule en panne ? Quelle est la probabilité que M_2 soit seule en panne ? En déduire la probabilité d'avoir une seule machine en panne. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune machine en panne ?

EXERCICE 9.

On considère les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer les produits matriciel $P(P-I)$ et $Q(Q-I)$. En déduire P^2 et Q^2. Calculer $P.Q$ et $Q.P$.
2. Soit $M = P+2Q$. Déterminer M.
3. Montrer que $M^2 = P+4Q$. Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $M^n = P+2^nQ$.

EXERCICE 10.

En intégrant par parties, calculer : $\int_0^2 (1+x^2).e^{-2x}\,dx$.

Partie II : ANALYSE DE PROCESSUS

EXERCICE 11.

On considère l'algorithme :

Variables :
n est un entier naturel ;
S est un réel ;
Début
Affecter à n la valeur 0 ;
Affecter à S la valeur 0 ;
Tant que $S \leq 2$, faire :
Affecter à n la valeur $n+1$;
Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{n}$;
Fin de tant que
Afficher n.
Fin

Que permet de calculer cet algorithme ? Le justifier en faisant fonctionner cet algorithme étape par étape.

EXERCICE 12.

On souhaite écrire un algorithme qui lise 8 nombres réels, les entre dans un tableau et donne le produit des nombres de ce tableau.

1. Ecrire un algorithme s'effectuant avec la structure itérative « Pour » ;
2. Ecrire un algorithme s'effectuant avec la structure itérative « Tant que » ;
3. Faire fonctionner ces algorithmes avec le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Indice du tableau	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur du tableau	12	10	4	0,5	0,25	0,3	–1	0,2